

Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 3 Junio Colisiones 2016

[2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi x) \cdot (1 + a \cdot \cos(\pi x))}{\text{sen}(x^2)}$ es finito, calcula "a" y el valor del límite.

Solución

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi x) \cdot (1 + a \cdot \cos(\pi x))}{\text{sen}(x^2)}$ es finito, calcula "a" y el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi x) \cdot (1 + a \cdot \cos(\pi x))}{\text{sen}(x^2)} = \frac{\cos(0) \cdot (1 + a \cdot \cos(0))}{\text{sen}(0)} = \frac{1 \cdot (1 + a \cdot 1)}{0} = (1 + a)/0.$$

Como me dicen que el límite es finito, **el numerador ha de ser cero**, para obtener 0/0 y poder aplicarle la regla de L'Hôpital, puesto que el límite es finito, es decir es un número. Igualando el numerador a cero, tenemos $1 + a = 0$, de donde **a = - 1**.

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H) con $a = - 1$. (si "f" y "g" son funciones continuas en $[a - \delta, a + \delta]$, derivables en

$(a - \delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞ , y también si $x \rightarrow \infty$), con lo cual tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi x) \cdot (1 - 1 \cdot \cos(\pi x))}{\text{sen}(x^2)} &= (0/0; \text{L'H}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\text{sen}(\pi x) \cdot \pi \cdot (1 - 1 \cdot \cos(\pi x)) + \cos(\pi x) \cdot (0 - 1 \cdot (-\text{sen}(\pi x) \cdot \pi))}{\cos(x^2) \cdot 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \cdot \text{sen}(\pi x) \cdot (-1 + \cos(\pi x) + \cos(\pi x))}{\cos(x^2) \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \cdot \text{sen}(\pi x) \cdot (-1 + 2 \cdot \cos(\pi x))}{2x \cdot \cos(x^2)} = \\ &= \frac{\pi \cdot \text{sen}(0) \cdot (-1 + 2 \cdot \cos(0))}{0 \cdot \cos(0)} = (0/0; \text{L'H}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \cdot \cos(\pi x) \cdot \pi \cdot (-1 + 2 \cdot \cos(\pi x)) + \pi \cdot \text{sen}(\pi x) \cdot (-2 \cdot \text{sen}(\pi x) \cdot \pi)}{2 \cdot \cos(x^2) + 2x \cdot (-\text{sen}(x^2)) \cdot 2x} = \\ &= \frac{\pi \cdot \cos(0) \cdot \pi \cdot (-1 + 2 \cdot \cos(0)) + \pi \cdot \text{sen}(0) \cdot (-2 \cdot \text{sen}(0) \cdot \pi)}{2 \cdot \cos(0) + 0 \cdot (-\text{sen}(0)) \cdot 0} = (\pi^2 \cdot (-1 + 2) + 0) / (2 + 0) = \pi^2/2 \end{aligned}$$

Resumiendo **el valor de a es -1 y el valor del límite es $\pi^2/2$** .

Ejercicio 2 opción A, modelo 3 Junio Colisiones 2016

Considera la función f dada por $f(x) = \sqrt{x} + \frac{\ln(x)}{x}$ para $x > 0$.

a) [1'5 puntos] Halla todas las primitivas de f .

b) [0'5 puntos] Halla $\int_1^3 f(x) \cdot dx$

c) [0'5 puntos] Determina la primitiva de f que toma el valor 3 para $x = 1$.

Solución

Considera la función f dada por $f(x) = \sqrt{x} + \frac{\ln(x)}{x}$ para $x > 0$.

a)

Halla todas las primitivas de f .

Calculamos por separado la integral de \sqrt{x} y la de $\frac{\ln(x)}{x}$.

$$I_1 = \int \sqrt{x} \cdot dx = \int x^{1/2} \cdot dx = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}$$

$$I_2 = \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \ln(x) = t \rightarrow \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Quito cambio} \\ \ln(x) = t \end{array} \right\} = \frac{(\ln(x))^2}{2}$$

Juntando ambas integrales tenemos que el conjunto de todas las primitivas es:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{\ln(x)}{x} \right) dx = I_1 + I_2 = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{(\ln(x))^2}{2} + K.$$

b)

$$\text{Halla } \int_1^3 f(x) \cdot dx = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{(\ln(x))^2}{2} \right]_1^3 = \left(\frac{2\sqrt{3^3}}{3} + \frac{(\ln(3))^2}{2} \right) - \left(\frac{2\sqrt{1^3}}{3} + \frac{(\ln(1))^2}{2} \right) = 2\sqrt{3} + \frac{(\ln(3))^2}{2} - \frac{2}{3}$$

c)

Determina la primitiva de f que toma el valor 3 para $x = 1$.

El conjunto de todas las primitivas es $F(x) = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{(\ln(x))^2}{2} + K$, como $F(1) = 3$ tenemos:

$$3 = \frac{2\sqrt{1^3}}{3} + \frac{(\ln(1))^2}{2} + K = 2/3 + K, \text{ de donde } K = 3 - 2/3 = 7/3, \text{ y la primitiva pedida es:}$$

$$F(x) = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{(\ln(x))^2}{2} + \frac{7}{3}.$$

Ejercicio 3 opción A, modelo 3 Junio Colisiones 2016

[2'5 puntos] Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Determina, si existe, la matriz X que verifica $AX + B^2 = BX + A^2$.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determina, si existe, la matriz X que verifica ;

De $AX + B^2 = BX + A^2$, tenemos $AX - BX = A^2 - B^2$, de donde (sacamos factor común por la derecha):
 $(A - B) \cdot X = A^2 - B^2$

Llamamos $C = A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\det(C) = |A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0$, existe la

matriz inversa $C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot \text{Adj}(C^t)$.

$(A - B) \cdot X = A^2 - B^2 \rightarrow C \cdot X = A^2 - B^2$. Multiplicando por la izquierda la expresión $C \cdot X = A^2 - B^2$ por C^{-1} , tenemos:

$$C^{-1} \cdot C \cdot X = C^{-1} \cdot (A^2 - B^2) \rightarrow I \cdot X = C^{-1} \cdot (A^2 - B^2) \rightarrow X = C^{-1} \cdot (A^2 - B^2).$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot \text{Adj}(C^t); |C| = 2; C^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; \text{Adj}(C^t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \text{luego } C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot \text{Adj}(C^t) = (1/2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } X = C^{-1} \cdot (A^2 - B^2) = (1/2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (1/2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 opción A, modelo 3 Junio Colisiones 2016

Considera un paralelogramo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo

$$A(1,0,-1), B(3,2,1) \text{ y } C(-7,1,5).$$

(a) [0'75 puntos] Determina las coordenadas del punto D.

(b) [1 punto] Calcula el área del paralelogramo.

(c) [0'75 puntos] Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

Solución

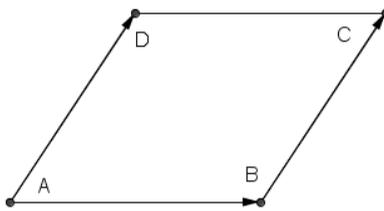
Considera un paralelogramo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo

$$A(1,0,-1), B(3,2,1) \text{ y } C(-7,1,5).$$

(a)

Determina las coordenadas del punto D.

La siguiente figura nos ayudará.



Si A, B, C y D son los vértices consecutivos de un paralelogramo, sabemos que los vectores **AD** y **BC** son iguales (son equipolentes y tienen las mismas coordenadas).

$$A(1,0,-1), B(3,2,1) \text{ y } C(-7,1,5).$$

De **AD = BC**, tenemos $(x - 1, y - 0, z + 1) = (-7 - 3, 1 - 2, 5 - 1)$. Igualando miembro a miembro tenemos: $x = -10 + 1 = -9$; $y = -1$; $z = 3$, luego **el punto pedido es D(-9,-1,3)**.

(b)

Calcula el área del paralelogramo.

Sabemos que el área de un paralelogramo es el módulo ($\| \cdot \|$) del producto vectorial (\times) de dos vectores que lo determinan. Podemos tomar los vectores **AD** y **AB**.

$$\mathbf{AD} = (-9-1, -1-0, 3+1) = (-10, -1, 4); \mathbf{AB} = (3-1, 2-0, 1+1) = (2, 2, 2)$$

$$\mathbf{AD} \times \mathbf{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -10 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = \mathbf{i}(-2-8) - \mathbf{j}(-20-8) + \mathbf{k}(-20+2) = (-10, 28, -18).$$

$$\text{Área paralelogramo} = \|\mathbf{AD} \times \mathbf{AB}\| = \sqrt{(10^2 + 28^2 + 18^2)} = \sqrt{(1208)} \text{ u}^2 \cong 34'756 \text{ u}^2.$$

(c)

Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

Para un plano necesito un punto el A(1,0,-1), y dos vectores independientes, el **AD** = (-10,-1,4) y el **AB** = (2,2,2)

La ecuación general del plano pedida es $\det(\mathbf{AX}, \mathbf{AD}, \mathbf{AB}) = 0$, siendo X(x,y,z) un punto genérico del plano.

$$\pi \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{AD}, \mathbf{AB}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -10 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (x-1) \cdot (-2-8) - y \cdot (-20-8) + (z+1) \cdot (-20+2) =$$

$$= -10x + 10 + 28y - 18z - 18 = 0 = -10x + 28y - 18z - 8 = 0 = -5x + 14y - 9z - 4 = 0.$$

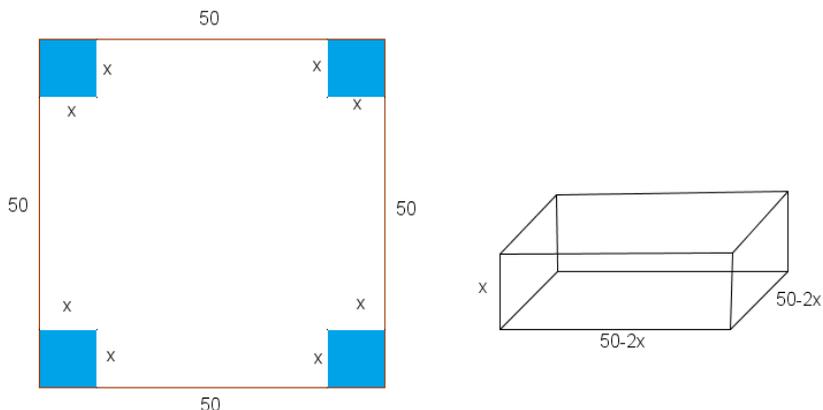
Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 3 Junio Colisiones 2016

[2'5 puntos] Se dispone de un cartón cuadrado de 50 cm de lado para construir una caja sin tapadera a partir del cartón. Para ello, se corta un cuadrado de x cm de lado en cada una de las esquinas. Halla el valor de x para que el volumen de la caja sea máximo y calcula dicho volumen.

Solución

La siguiente figura nos ayudará:



Si recortamos cuadrados de lado x en las esquinas y formamos una caja sin tapa, vemos que la caja tiene de largo $50 - 2x$, ancho $50 - 2x$ y alto x .

Función a Optimizar: Volumen = $V(x) = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{alto} = (50 - 2x)^2 \cdot x = (4x^2 - 200x + 2500) \cdot x = 4x^3 - 200x^2 + 2500x$

Sabemos que si $g'(a) = 0$ y $g''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo de $g(x)$

Sabemos que si $g'(a) = 0$ y $g''(a) > 0$, $x = a$ es un mínimo relativo de $g(x)$

$$V(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2500x; \quad V'(x) = 12x^2 - 400x + 2500$$

De $V'(x) = 0$, tenemos $12x^2 - 400x + 2500 = 0 = 3x^2 - 100x + 625 = 0$.

$$x = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 7500}}{6} = \frac{100 \pm \sqrt{2500}}{6} = \frac{100 \pm 50}{6}, \text{ de donde } x = 150/6 = 25 \text{ y } x = 50/6 = 25/3 \cong 8'333.$$

La solución $x = 25 \text{ cm}$ no sirve, pues si recortamos cuadrados en las esquinas de 25 cm nos quedamos sin el cartón de 50 cm de lado.

El único valor válido es $x = 25/3 \cong 8'333 \text{ cm}$.

Veamos que es máximo.

$$V'(x) = 12x^2 - 400x + 2500; \quad V''(x) = 24x - 400$$

Como $V''(25/3) = 24(25/3) - 400 = -200 < 0$, luego $x = 25/3 \cong 8'333 \text{ cm}$ es un máximo relativo.

El volumen pedido es $V(25/3) = (50 - 2(25/3))^2 \cdot (25/3) = 250000/27 \text{ cm}^3 \cong 9259'259 \text{ cm}^3$.

Ejercicio 2 opción B, modelo 3 Junio Colisiones 2016

[2'5 puntos] Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

La función $f(x)$ está definida en todo \mathbb{R} , el denominador siempre es positivo, para $x = 0$, $f(0) = 0$ y para $x = 3$,

$$f(3) = \frac{2(3)}{(3^2 + 1)^2} = 6/100 > 0, \text{ por tanto el área pedida es } \int_0^1 f(x) \cdot dx.$$

Calculo primero la integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x^2 + 1 = t \rightarrow 2x \cdot dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} \cdot dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} = \frac{-1}{t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Quito cambio} \\ x^2 + 1 = t \end{array} \right\} = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

$$\text{Luego el área pedida es: } \text{Área} = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \left[\frac{-1}{x^2 + 1} \right]_0^1 = \left(\frac{-1}{1^2 + 1} \right) - \left(\frac{-1}{0^2 + 1} \right) = (-1/2 + 1) u^2 = 1/2 u^2.$$

Ejercicio 3 opción B, modelo 3 Junio Colisiones 2016

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + \lambda y + z = \lambda \\ \lambda x + y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$,

a) [1'75 puntos] Determina, si existen, los valores de λ para los que el sistema tiene infinitas soluciones.

b) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para $\lambda = -2$.

Solución

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + \lambda y + z = \lambda \\ \lambda x + y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$,

a)

Determina, si existen, los valores de λ para los que el sistema tiene infinitas soluciones.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

Como me piden los valores de λ para los que el sistema tiene infinitas soluciones, se tiene que cumplir que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) < 3$ (número de incógnitas).

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (1) \cdot (\lambda - 1) - \lambda \cdot (\lambda^2 - 1) + 1 \cdot (\lambda - 1) =$$

$$= (\lambda - 1) - \lambda \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1) + (\lambda - 1) = (\lambda - 1) \cdot (1 - \lambda \cdot (\lambda + 1) + 1) = (\lambda - 1) \cdot (-\lambda^2 - \lambda + 2).$$

De $|A| = 0$, tenemos $\lambda - 1 = 0$ y $-\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$.

Si $\lambda - 1 = 0$, resulta $\lambda = 1$.

$$\text{Si } -\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}, \text{ de donde } \lambda = 1 \text{ y } \lambda = -2.$$

Resumiendo las soluciones de $|A| = 0$ son $\lambda = 1$ (doble) y $\lambda = -2$.

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2$, $|A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = \text{número de incógnitas}$. **NO ES NUESTRO CASO**

$$\text{Si } \lambda = 1 \text{ tenemos } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y la matriz ampliada } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{En } A \text{ tenemos } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ por tanto } \text{rango}(A) = 1, \text{ pues sólo queda una fila con nú-}$$

meros distinto de cero.

$$\text{En } A^* \text{ tenemos } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ por tanto } \text{rango}(A^*) = 1, \text{ pues sólo queda una fila}$$

con números distinto de cero.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 1 < 3$ (número de incógnitas), el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones. **SI ES NUESTRO CASO**,

$$\text{Si } \lambda = -2 \text{ tenemos } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y la matriz ampliada } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{En } A \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0, \text{ rango}(A) = 2.$$

$$\text{En } A^* \text{ formamos el menor de orden 3 con las columnas } 1^a, 2^a \text{ y } 4^a. \text{ Como } \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ por tener dos}$$

columnas iguales, tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < 3$ (número de incógnitas), el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones. **SI ES NUESTRO CASO**,

b)

Resuelve el sistema para $\lambda = -2$.

Hemos visto que $\lambda = -2$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < \text{número de incógnitas}$, por tanto es un sistema compatible e indeterminado con infinitas soluciones. Tomamos sólo las dos primeras ecuaciones puesto que el rango es dos, las dos primeras que son con los que he formado el menor de orden 2 distinto de 0 de la matriz A.

$$\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases} \cdot F_2 - F_1 \approx \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -3x + 3y = 3 \end{cases} \cdot F_2/3 \approx \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -x + y = 1 \end{cases} . \text{ Tomando } x = b \in \mathbb{R}, \text{ resulta } y = 1 + b \text{ y}$$

entrando en la primera ecuación, $(b) - 2(1+b) + z = -2 \rightarrow b - 2 - 2b + z = -2 \rightarrow z = b$.

Las infinitas soluciones del sistema son $(x,y,z) = (b, 1 + b, b)$ con $b \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 opción B, modelo 3 Junio Colisiones 2016

Considera el punto $P(1,0,-1)$ y el plano π de ecuación $2x - y + z + 1 = 0$.

(a) [1'25 puntos] Halla el simétrico del punto P respecto al plano π .

(b) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene al punto P , es perpendicular al plano π y es

paralelo a la recta dada por $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$.

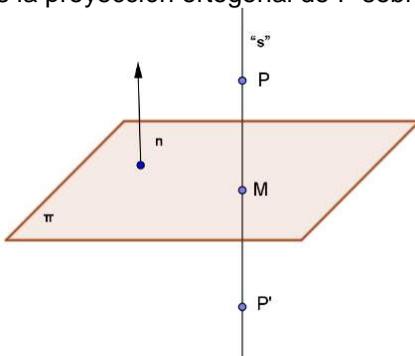
Solución

Considera el punto $P(1,0,-1)$ y el plano π de ecuación $2x - y + z + 1 = 0$.

(a)

Halla el simétrico del punto P respecto al plano π .

Calculamos la recta "s" perpendicular (\perp), al plano π (el vector director \mathbf{u} de la recta "s" es el vector normal \mathbf{n} del plano π) por el punto P . Determinamos $M = s \cap \pi$, y M es el punto medio del segmento PP' , donde P' es el simétrico pedido, puesto que M es la proyección ortogonal de P sobre π .



$s(P;\mathbf{u}) = s(P;\mathbf{n})$ con $P(1,0,-1)$ y $\mathbf{n} = (2,-1, 1)$.

Su ecuación vectorial es $s \equiv (x,y,z) = (1+2b,-b,-1+b)$ con $b \in \mathbb{R}$.

$M = s \cap \pi$, sustituimos la ecuación de la recta en el plano y obtenemos el parámetro "b", y luego el punto M .

$\rightarrow 2(1+2b) - (-b) + (-1+b) + 1 = 0 = 6b + 2$, de donde $b = -1/3$, y el punto M es

$M(1+2(-1/3), -(-1/3), -1+(-1/3)) = M(1/3, 1/3, -4/3)$.

M es el punto medio del segmento PP' , donde P' es el simétrico pedido.

$(1/3, 1/3, -4/3) = ((1+x)/2, (0+y)/2, (-1+z)/2)$, de donde $x = 2/3 - 1 = -1/3$, $y = 2/3$, $z = -8/3 + 1 = -5/3$.

El simétrico pedido es $P'(-1/3, 2/3, -5/3)$.

(b)

Determina la ecuación del plano π' que contiene al punto P , es perpendicular al plano π y es paralelo a la

recta dada por $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$.

Ponemos la recta "r" $\equiv \begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ en paramétricas. $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Un vector director de "r" es $\mathbf{v} = (2,1,0)$.

Como el plano π' es perpendicular al plano π , su vector normal \mathbf{n}' es perpendicular al vector normal \mathbf{n} del plano π .

Como el plano π' es paralelo a la recta "r", su vector normal \mathbf{n}' es perpendicular al vector director \mathbf{v} de la recta "r".

Tenemos que \mathbf{n}' es perpendicular a la vez a los vectores \mathbf{n} y \mathbf{v} , por tanto podemos tomar como vector \mathbf{n}' el vector producto vectorial (\times) de los vectores \mathbf{n} y \mathbf{v} .

Tenemos $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$; $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$, luego $\mathbf{n}' = \mathbf{nxv} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos
 primera = $\mathbf{i}(0-1) - \mathbf{j}(2+2) + \mathbf{k}(2+2) =$
 fila

$= (-1, 2, 4) = \mathbf{n}'$.

$P(1, 0, -1)$

El plano pedido es $\pi' \equiv \mathbf{PX} \bullet \mathbf{n}' = 0$, donde X es punto cualquiera del plano y (\bullet) el producto escalar.

$\pi' \equiv \mathbf{PX} \bullet \mathbf{n}' = 0 = (x-1, y, z+1) \bullet (-1, 2, 4) = -x+1+2y+4z+4 = -\mathbf{x} + 2\mathbf{y} + 4\mathbf{z} + 5 = 0$